Test – selectie grupa IX

Problema 1

Numerele reale a și b verifică înegalitatea

$$\boldsymbol{a^2+b^2-10a\sqrt{6}-12b\sqrt{5}+330\leq 0.}$$

Demonstrați că numărul $x=\left(\frac{6}{b}+\frac{5}{a}\right)(b-a)$ este număr natural.

Solutie.

$a^2+b^2-10a\sqrt{6}-12b\sqrt{5}+330\leq 0 \Leftrightarrow$

$\left(a^2-2\cdot 5a\sqrt{6}+25\cdot 6\right)+\left(b^2-2\cdot 6b\sqrt{5}+36\cdot 5\right)\leq 0 \Leftrightarrow$ . . . . 2 p

$\left(a-5\sqrt{6}\right)^2+\left(b-6\sqrt{5}\right)^2\leq 0$ de unde $a-5\sqrt{6}=0$ și $b-6\sqrt{5}=0$ . . . 2 p

Deci $a=5\sqrt{6}$ și $b=6\sqrt{5}$, după care . . . . 1 p

$x=\left(\frac{6}{b}+\frac{5}{a}\right)(b-a)=\left(\frac{6}{6\sqrt{5}}+\frac{5}{5\sqrt{6}}\right)\left(6\sqrt{5}-5\sqrt{6}\right)$ . . . . 1 p

$x=\left(\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{30}}+\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{30}}\right)\left(6\sqrt{5}-5\sqrt{6}\right)=\frac{\sqrt{30}}{\sqrt{30}}=1$ . . . . 1 p

Problema 2.

Rezolvați în mulțimea numerelor raționale ecuația:

$$\boldsymbol{\frac{x-2}{2017}+\frac{x-3}{2018}+\frac{x-4}{2019}=\frac{x+2013}{2}+\frac{x+2012}{3}+\frac{x+2011}{4}}$$

Soluție.

$\frac{x-2}{2017}+1+\frac{x-3}{2018}+1+\frac{x-4}{2019}+1=\frac{x+2013}{2}+1+\frac{x+2012}{3}+1+\frac{x+2011}{4}+1$ . . . . . . 3 p

$\frac{x+2015}{2017}+\frac{x+2015}{2018}+\frac{x+2015}{2019}=\frac{x+2015}{2}+\frac{x+2015}{3}+\frac{x+2015}{4}$ . . . . 2 p

$(x+2015)\left(\frac{1}{2017}+\frac{1}{2018}+\frac{1}{2019}-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)=0$ cu solutie $x=-2015$ . . . . 1 p

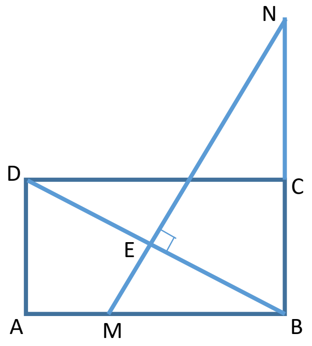
pentru că $\frac{1}{2017}+\frac{1}{2018}+\frac{1}{2019}-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\neq 0$ . . . . 1 p

Problema 3.

În dreptunghiul ABCD cu $AB > BC$, punctul E aparține diagonalei BD. Perpendiculara în E pe BD intersectează pe AB în M și pe BC în N. Arătați că:

a) $\frac{AB^2}{BC^2} = \frac{NE}{ME}$

b) $\frac{AB \cdot ME + BC \cdot NE}{BE}$ **este constant, oricare ar fi poziția lui E pe BD.**



. . . . 1 p

$\triangle BEM \sim \triangle BAD \Longrightarrow \frac{ME}{AD} = \frac{EB}{AB}$; . . . . 1 p

$\triangle BEN \sim \triangle BCD \Longrightarrow \frac{NE}{CD} = \frac{EB}{BC} \Leftrightarrow \frac{NE}{AB} = \frac{EB}{BC}$ . . . . 1 p

Deci $ME = \frac{EB \cdot AD}{AB} = \frac{EB \cdot BC}{AB}$ și $NE = \frac{EB \cdot AB}{BC}$ . . . . 1 p

Astfel că $\frac{NE}{ME} = \left(\frac{AB}{BC}\right)^2$ . . . . 1 p

b) $\frac{AB \cdot ME + BC \cdot NE}{BE} = AB \cdot \frac{ME}{BE} + BC \cdot \frac{NE}{BE} = AB \cdot \frac{AD}{AB} + BC \cdot \frac{AB}{BC} = AD + AB = const. . .2$ p