ONGM - etapa I - clasa a XII-a

Testul conține 20 de itemi, fiecare cu patru variante de răspuns, dintre care una singură este corectă.
Aveți la dispoziție 2 ore pentru rezolvarea itemilor.
La ora 11 trimiteți testul după ce ați bifat variantele de răspuns pe care le-ați considerat corecte.

Adresa dvs. de e-mail va fi înregistrată când trimiteți acest formular.

sas.monica@excelentabn.ro nu este adresa dvs.? Schimbați contul.

Problema 1

5 puncte

Se consideră următoarele legi de compoziție, definite pe $\mathbb{Z}_{13}$: $x * y = x + y + \widehat{10}$ și $x \blacksquare y = xy + \widehat{10}x + \widehat{10}y + \widehat{12}$.

Notăm cu e_1 elementul neutru al legii „$*$” și cu e_2 elementul neutru al legii „$\blacksquare$”. Atunci:

A. $e_1 \cdot e_2 + e_1 + e_2 = \hat{5}$ C. $e_1 \cdot e_2 = \hat{1}$

B. $e_1 + e_2 = \hat{6}$ D. $(e_1 + \hat{1})(e_2 + \hat{2}) = \widehat{11}$

- A
- B
- C
- D

Problema 2

5 puncte

Fie M o mulțime cu n elemente. Numărul de legi de compoziție comutative care se pot defini pe M este:

A. n^{n^2} B. n^n C. $n^{\frac{n(n-1)}{2}}$ D. $n^{\frac{n(n+1)}{2}}$

- A
- B
- C
- D

Problema 3

5 puncte

Funcția $f: \mathbb{R} \to GL_2(\mathbb{R})$, $f(x) = \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}$ este morfism de la grupul $(\mathbb{R}, +)$ la grupul $(GL_2(\mathbb{R}), \cdot)$. Mulțimea $H = \{x \in \mathbb{R} | f(x) = I_2\}$ este egală cu:

A. $\{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$ B. $\{2k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$ C. $\{0\}$ D. $\left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi | k \in \mathbb{Z}\right\}$

- A
- B
- C
- D

Problema 4

5 puncte

Pe mulțimea $\mathbb{R}$ se definește o lege de compoziție „$*$” care satisface proprietățile:

a. $\left(\frac{x+1}{2}\right) * x = 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}$;

b. $(x * y) \cdot z = (x \cdot z) * (y \cdot z), \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}$.

Valoarea expresiei $3 * 4$ este:

A. 1   B. 2   C. 3   D. 4

- A
- B
- C
- D

Problema 5

5 puncte

Fie $M = (4, +\infty)$ și legea de compoziție $x \circ y = xy - 4x - 4y + a, \forall x, y \in M$. Valorile lui $a \in \mathbb{R}$, pentru care mulțimea M este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea de compoziție „$\circ$” sunt:

A. $a \in \mathbb{R}$ B. $a \in (20, +\infty)$ C. $a \in [20, +\infty)$ D. $a = 20$

- A
- B
- C
- D

Problema 6

5 puncte

Dacă $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, este o primitivă a funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} e^x, & x < 0 \\ \cos x, & x \geq 0 \end{cases}$ care verifică relația $F(-1) = \frac{1+e}{e}$, atunci valoarea lui $F\left(\frac{\pi}{3}\right)$ este:

A. $\frac{4+\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{5}{2}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $\frac{1}{2}$

- A
- B
- C
- D

Problema 7

5 puncte

Fie $f, F: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x\sqrt{x+1}$ și $F(x) = (ax^2 + bx + c)\sqrt{x+1}$.

Tripletul de numere reale (a, b, c) pentru care F este o primitivă a funcției f este:

A. $\left(\frac{2}{15}, \frac{2}{5}, -\frac{4}{15}\right)$ B. $\left(\frac{2}{5}, \frac{2}{15}, \frac{4}{15}\right)$ C. $\left(\frac{2}{5}, \frac{2}{15}, -\frac{4}{15}\right)$ D. $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{6}\right)$

- A
- B
- C
- D

Problema 8

5 puncte

Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 50x^{2020} + 7x^{2019} + 5$.

Atunci $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{25x^{2021}} \cdot \int_0^x f(t)dt$ este egală cu:

A. 0   B. $+\infty$ C. $\frac{2}{2021}$ D. $\frac{1}{2021}$

- A
- B
- C
- D

Problema 9

5 puncte

Valoarea numărului real a pentru care $\int_1^a (2x^2 - 3x + 1)dx = \frac{22}{3}$ este:

A. 0   B. 1   C. 2   D. 3

- A
- B
- C
- D

Problema 10

5 puncte

Valoarea integralei definite $\int_0^1 \frac{ln(x + \sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}} dx$ este egală cu:

A. $\frac{1}{2} ln(1 + \sqrt{2})$ B. $ln(3 + 2\sqrt{2})$ C. $\frac{1}{2} ln^2(1 + \sqrt{2})$ D. $ln^2(1 + \sqrt{2})$

- A
- B
- C
- D

Problema 11

5 puncte

Fie $(G, \cdot)$ un grup finit și $x \in G$. Dacă m și n sunt două numere întregi cu proprietățile

$$(m, n) = 1, \qquad \operatorname{ord}(x^n) = m \quad \text{și} \quad \operatorname{ord}(x^m) = n,$$

Atunci ordinul lui x este:

A. mn B. $m + n$ C. m D. n

- A
- B
- C
- D

Problema 12

5 puncte

Fie $(G, \cdot)$ un grup abelian finit, cu 9 elemente. Se notează cu $\mathbf{e}$ elementul neutru al grupului. Atunci:

A. Orice element are ordinul egal cu 9

B. Produsul tuturor elementelor este egal cu $\mathbf{e}$

C. $(G, \cdot)$ este grup ciclic

D. Există cel puțin un element $a \in G$, astfel încât $\boldsymbol{a^2 = e}$

- A
- B
- C
- D

Problema 13

5 puncte

Fie $a, b \in \mathbb{Z}$. Pe mulțimea numerelor întregi se consideră legea de compoziție

$$x * y = (x - a)(y - b) + a, \quad \forall x, y \in \mathbb{Z}$$

Elementul neutru la dreapta al legii este:

A. nu există   B. 0   C. b D. $1 + b$

- A
- B
- C
- D

Problema 14

5 puncte

Fie $a, b \in \mathbb{Z}$. Pe mulțimea numerelor întregi se consideră legea de compoziție

$$x * y = (x - a)(y - b) + a, \quad \forall x, y \in \mathbb{Z}$$

Elementele simetrizabile la dreapta sunt:

A. $\forall x \in \mathbb{Z}$ C. $x \in \{a - 1; a + 1\}$, pentru $a = b$

B. $x \in \mathbb{Z} \setminus \{a\}$ D. $x \in \{a - 1; a + 1\}$, pentru $a \neq b$

- A
- B
- C
- D

Problema 15

5 puncte

Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție

$$x * y = xy + ax + 2by, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}, \text{ unde } a, b \in \mathbb{R}^*.$$

Valorile lui a și b pentru care legea „$*$” este asociativă și comutativă sunt:

A. $a = \frac{1}{2},\ b = 2$ B. $a = 1,\ b = \frac{1}{2}$ C. $a = \frac{1}{2},\ b = 1$ D. $a = 2,\ b = \frac{1}{2}$

- A
- B
- C
- D

Problema 16

5 puncte

Se consideră funcția $f: [0; \infty) \to \mathbb{R}$ cu proprietatea $x + \int_0^x f(t)dt = (x + 1)f(x)$, $\forall x > 0$. Atunci $f(1)$ este egal cu:

A. 0   B. $\ln 2$ C. $\ln 3$ D. $2 + \ln 2$

- A
- B
- C
- D

Problema 17

5 puncte

Fie $\alpha \in \mathbb{R}^*$ și funcția $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită prin $g(x) = \begin{cases} cos\left(\frac{\alpha}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$. Atunci:

A. g este continuă pe $\mathbb{R}$ C. g admite primitive pe $\mathbb{R}$

B. g nu admite primitive pe $\mathbb{R}$ D. g nu are proprietatea lui Darboux

- A
- B
- C
- D

Problema 18

5 puncte

Valoarea integralei $\int_{-1}^0 |4x^2 - 11x - 3|\, dx$ este:

A. $\frac{23}{6}$ B. $\frac{221}{48}$ C. $-\frac{23}{6}$ D. 0

- A
- B
- C
- D

Problema 19

5 puncte

Limita șirului $(a_n)_{n \geq 1}$ definit prin $a_n = \int_n^{2n} \frac{1}{x} \cdot e^{\frac{1}{x}} dx, n \geq 1$, este:

A. 2   B. 1   C. $\ln 2$ D. 0

- A
- B
- C
- D

Problema 20

5 puncte

Se consideră șirul $(I_n)_{n \geq 1}$, unde $I_n = \int_0^1 \frac{x^{n-1} - x^n}{(1 + x^n)(1 + x^{n+1})} dx, n \geq 1$.

Dacă $a_n = \sum_{k=1}^{n} I_k$, atunci limita $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{ln2}{a_n}\right)^n$ este egală cu:

A. e^2 B. e C. $\frac{1}{e}$ D. $2e$

- A
- B
- C
- D

Trimiteți