

Barem

S I. a) Calculați  $(2^{32} \cdot 7^{32}) : (14^3)^{10} + 27^8 : 3^{18} : 81$

$(2^{32} \cdot 7^{32}) : (14^3)^{10} + 27^8 : 3^{18} : 81 =$	4 p
$= 14^{32} : 14^{30} + (3^3)^8 : 3^{18} : 3^4 = 14^2 + 3^{24} : 3^{18} : 3^4 =$	
$= 14^2 + 3^2 = 196 + 9 = 205$	

b) Să se scrie numărul  $205^{41}$  ca suma a două pătrate perfecte.

$205^{41} = 205 \cdot 205^{40} = (14^2 + 3^2) \cdot (205^{20})^2 =$	3 p
$= 14^2 \cdot (205^{20})^2 + 3^2 \cdot (205^{20})^2$	
$205^{41} = (14 \cdot 205^{20})^2 + (3 \cdot 205^{20})^2$	

S II. a) Să se arate că oricare ar fi cifra  $x$ , numărul

$n = 2021^{\overline{72x}} + 2022^{\overline{x27}} + 2023^{\overline{x72}}$  se divide cu 10.

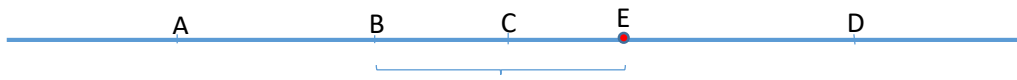
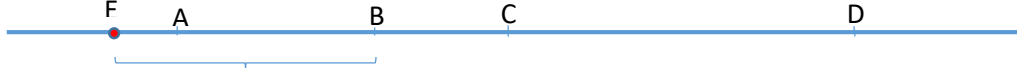


$\forall x \in \mathbb{N}, u(2021^{\overline{72x}}) = 1$	4 p
$\forall x \in \mathbb{N}, u(2022^{\overline{x27}}) = u(2022^{\overline{x24}} \cdot 2022^3) = u(2022^3) = 8$	
$\forall x \in \mathbb{N}, u(2023^{\overline{x72}}) = u(3^4) = 1 \quad (\overline{x72} : 4)$	
Prin urmare $u(n) = u(1 + 8 + 1) = 0 \Rightarrow n : 10$	

b) Să se afle numerele de forma  $\overline{abc}$ ,  $a \neq b$ , știind că  
 $\overline{a7b} + \overline{b3a} + \overline{ab} + \overline{ba} = 2^c + 771$ .

$u(\overline{a7b} + \overline{b3a} + \overline{ab} + \overline{ba}) = u(2b + 2a) = \text{cifră pară}$	3 p
---	-----

$deci \ u(2^c + 771) = \text{cifră pară} \Rightarrow u(2^c) = \text{cifră impară}$ $u(2^c) = 1$ pentru $c = 0$	
$\overline{a7b} + \overline{b3a} + \overline{ab} + \overline{ba} = 772$ $112a + 112b + 100 = 772$	
$112(a + b) = 672 \quad a + b = 6 \Rightarrow (a, b) \in \{(5,1), (4,2), (2,4), (1,5)\}$ $\overline{abc} \in \{510, 420, 240, 150\}$	

S III. Punctele  $A, B, C$  și  $D$  sunt coliniare, astfel încât  $AB = 3 \text{ cm}$ ,  $BC = 2 \text{ cm}$ , iar punctul  $D$  este simetricul punctului  $A$  față de punctul  $C$ . Considerăm un punct  $E$  situat pe dreapta  $AB$  astfel încât  $BE = 4 \text{ cm}$ . Calculați distanța dintre punctele  $D$  și  $E$ .

<p>(1) <math>A, B, C</math> coliniare, <math>B</math> fiind între <math>A</math> și <math>C</math></p>  <p>i) <math>BE = 4 \text{ cm}</math> și <math>E</math> este între <math>C</math> și <math>D</math>  <math>AC = AB + BC = 3 \text{ cm} + 2 \text{ cm} = 5 \text{ cm}</math>  <math>A</math> și <math>D</math> sunt simetrice față de <math>C \Rightarrow CD = 5 \text{ cm}</math>  <math>DE = DC - CE = 5 \text{ cm} - (4 \text{ cm} - 2 \text{ cm}) = 3 \text{ cm}</math></p> <p>ii) <math>BE = 4 \text{ cm}</math> iar <math>E</math> și <math>B</math> sunt de o parte și de alta a lui <math>A</math></p>  <p><math>EA = BE - AB = 4 \text{ cm} - 3 \text{ cm} = 1 \text{ cm}</math>  <math>DE = DA + EA = 2 \cdot 5 \text{ cm} + 1 \text{ cm} = 11 \text{ cm}</math></p>	4 p
<p>(2) <math>A, B, C</math> coliniare, <math>C</math> fiind între <math>A</math> și <math>B</math></p>  <p>i) <math>BE = 4 \text{ cm}</math> și <math>B</math> este între <math>D</math> și <math>E</math>  <math>AC = AB - BC = 3 \text{ cm} - 2 \text{ cm} = 1 \text{ cm}</math>  <math>A</math> și <math>D</math> sunt simetrice față de <math>C \Rightarrow CD = 1 \text{ cm}</math>,  <math>BD = 3 \text{ cm} - 2 \text{ cm} = 1 \text{ cm}</math>  <math>DE = DB + BE = 1 \text{ cm} + 4 \text{ cm} = 5 \text{ cm}</math></p> <p>ii) <math>BE = 4 \text{ cm}</math> și <math>A</math> este între <math>E</math> și <math>C</math></p>  <p><math>EA = BE - BA = 4 \text{ cm} - 3 \text{ cm} = 1 \text{ cm}</math>  <math>DE = BE - BD = 4 \text{ cm} - 1 \text{ cm} = 3 \text{ cm}</math></p> <p>Deci <math>DE</math> poate avea 3 cm, 11 cm, 5 cm sau 6 cm.</p>	3 p