Problema 1.

(3p) **a)** Să se arate că numărul $A=5+5^2+5^3+...+5^{2020}$ este divizibil cu 15.

(4p) **b)** Să se arate că numărul $B=54^{n+1}+3^{2n+2}\cdot 6^n+2^n\cdot 3^{3n+3}$ se divide cu 30 pentru orice n număr natural.

1.a)	$5+5^2=30$, $5^3+5^4=5^2\left(5+5^2\right)=5^2\cdot 30$	1 p
	$5^{2019}+5^{2020}=5^{2018}\left(5+5^2\right)=5^{2018}\cdot 30$	1 p
	$A=30\cdot\left(1+5^2+...+5^{2018}\right)$, deci $A\,\vdots\,15$	1 p
1.b)	$B=54^n\cdot 54+3^{2n}\cdot 3^2\cdot 6^n+2^n\cdot 3^{3n}\cdot 3^3$	1 p
	$B=54^n\cdot 54+9^n\cdot 3^2\cdot 6^n+2^n\cdot 27^n\cdot 3^3$	1 p
	$B=54^n\left(54+9+27\right)$	1 p
	$B=54^n\cdot 90$, deci $B\,\vdots\,30$	1 p

Problema 2.

(3p) **a)** Arătați că: $\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n\cdot(n+1)}$, oricare ar fi numărul natural nenul n.

(4p) **b)** folosind eventual punctul **a)**, arătați că numărul

$P=\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+...+\frac{1}{2020\cdot 2021}\right):\frac{1010}{2021}\cdot\left(2^{4n+2}-2^{4n+1}\right)$ este pătrat perfect, pentru orice n număr natural.

2.a)	numitor comun este $n\cdot(n+1)$	1 p
	$\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{n+1}{n\cdot(n+1)}-\frac{n}{n\cdot(n+1)}$	1 p
	obținem $\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n\cdot(n+1)}$	1 p
2.b)	din punctul a) $\Rightarrow$ $\frac{1}{1\cdot 2}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2\cdot 3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$, ..., $\frac{1}{2020\cdot 2021}=\frac{1}{2020}-\frac{1}{2021}$	1 p
	$\Rightarrow P=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2021}\right)\cdot\frac{2021}{1010}\cdot\left(2^{4n+2}-2^{4n+1}\right)$	1 p
	$P=2\cdot\left(2^{4n+2}-2^{4n+1}\right)=2\cdot 2^{4n+1}\left(2-1\right)$	1 p
	$P=2^{4n+2}=\left(2^{2n+1}\right)^2$, pătrat perfect	1 p

Problema 3.

Fie punctele $A_0, A_1, A_2, ..., A_{2021}$, situate în această ordine pe o dreaptă, astfel ca: $A_0A_1 = A_1A_2 = 1\text{cm}$ și $A_kA_{k+1} = 2 \cdot A_{k-1}A_k$, unde k ia valorile 2, 3, ..., 2020.

(3p) **a)** Să se arate că A_4 este mijlocul segmentului $[A_0A_5]$;

(4p) **b)** Să se calculeze lungimea segmentului $[A_0A_{2021}]$.

3.a)	$A_2A_3 = 2 \cdot A_1A_2 = 2$, $A_3A_4 = 2 \cdot A_2A_3 = 2^2$	1 p
	$A_0A_5 = 1+1+2+2^2+2^3 = 16$	1 p
	$A_0A_4 = 8$, deci A_4 este mijlocul segmentului $[A_0A_5]$	1 p
3.b)	$A_0A_{2021} = A_0A_1 + A_1A_2 + ... + A_{2020}A_{2021}$	1 p
	$A_kA_{k+1} = 2^{k-1}$	1 p
	$A_0A_{2021} = 1+1+2+2^2+...+2^{2019}$	1 p
	din calcul obținem $A_0A_{2021} = 2^{2020}$	1 p