Test – selecție grupa VII

Problema 1

Scrieți numărul $\overline{3m7}$ ca o sumă de două numere naturale nenule direct proporționale cu a și b, știind că a și b sunt invers proporționale cu 4 și 5.

Fie x și y numerele căutate.

$\{a,b\}\ i.p.\{4,5\} \Longrightarrow 4a = 5b \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{5}{4}$ . . . . 1 p

$\{x,y\}\ d.p.\{a,b\} \Longrightarrow \frac{x}{a} = \frac{y}{b} \Leftrightarrow \frac{x}{y} = \frac{a}{b} = \frac{5}{4}$, de unde $y = \frac{4x}{5}$ . . . . 2 p

$\overline{3m7} = x + y = x + \frac{4x}{5} = \frac{9x}{5} \Longrightarrow x = \frac{\overline{3m7}\cdot 5}{9}$ . .. . 2 p

$x \in \mathbb{N}^*$, deci $\frac{\overline{3m7}\cdot 5}{9} \in \mathbb{N}^*$ ceea ce conduce la $\overline{3m7} \vdots 9$ și avem numărul 387 . . 1 p

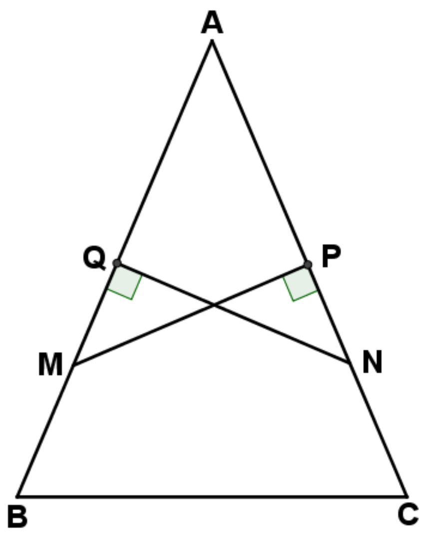
După care $x = \frac{387\cdot 5}{9} = 215$ și $y = 172$ . . . . 1 p

Problema 2

Se consideră triunghiul ABC și punctele $M \in (AB)$, $N \in (AC)$ astfel încât $[BM] \equiv [CN]$. Dacă $MP \perp AC$, $P \in (AC)$, $NQ \perp AB$, $Q \in (AB)$ și $[MP] \equiv [NQ]$, demonstrați că:

a) $[AB] \equiv [AC]$

b) Punctele A, T și I sunt coliniare, unde I este centrul cercului înscris în $\triangle ABC$, iar $\{T\} = MP \cap NQ$.



a) $\Delta APM \equiv \Delta AQN\,(C.U.) \Rightarrow [AM] \equiv [AN]$.. **2p**

$AB = AM + MB,\ AC = AN + NC,\ [AM] \equiv [AN],\ [MB] \equiv [NC] \Rightarrow [AB] \equiv [AC]$..... **1p**

b) $\Delta TAP \equiv \Delta TAQ\,(I.C.)$.. **2p**

Din această congruență $\Rightarrow \sphericalangle TAP \equiv \sphericalangle TAQ \Rightarrow [AT$ – bisectoarea $\sphericalangle BAC$............ **1p**

I este centrul cercului înscris în $\Delta ABC \Rightarrow I \in [AT$. Deci A, T, I sunt coliniare..... **1p**

Problema 3

Aflați numărul $\overline{abcd}$, divizibil cu 111, pentru care $\overline{abcd} = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot p_4$, unde p_1, p_2, p_3, p_4 sunt numere prime, $p_1 < p_2 < p_3 < p_4$ și $p_4 = \overline{p_1 p_2}$.

$111 = 3 \cdot 37,\ (3,37) = 1,\ \overline{abcd} \vdots 111 \Rightarrow \overline{abcd} \vdots 3$ și $\overline{abcd} \vdots 37$ **1p**

Dacă $p_1 = 3$ atunci din $p_1 < p_2$ și $p_4 = \overline{3p_2}$, p_4 număr prim $\Rightarrow p_2 = 7$ și $p_4 = 37$ **1p**

Atunci $\overline{abcd} = 3 \cdot 7 \cdot p_3 \cdot 37$, unde $7 < p_3 < 37$, iar p_3 este număr prim.

Dacă $p_3 \geq 13$ atunci $3 \cdot 7 \cdot p_3 \cdot 37 \geq 3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 37 \Rightarrow 3 \cdot 7 \cdot p_3 \cdot 37 \geq 10101$.

Deci $p_3 = 11$, iar $\overline{abcd} = 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 37$; $\overline{abcd} = 8547$. **2p**

Dacă $p_2 = 3$ atunci din $p_1 < 3$ și p_1 număr prim obținem $p_1 = 2$, iar $p_4 = 23$, iar 23 este număr prim. **1p**

Atunci $\overline{abcd} = 2 \cdot 3 \cdot p_3 \cdot 23$, cu $3 < p_3 < 23$, iar p_3 este număr prim. Din $\overline{abcd} \vdots 37$ rezultă $p_3 = 37$, dar atunci nu este respectată condiția $p_1 < p_2 < p_3 < p_4$. Deci în această situație nu avem soluții. **1p**

Dacă $p_3 = 3$ atunci condițiile $p_1 < p_2 < 3$ și p_1, p_2 numere prime nu pot fi îndeplinite.

Dacă $p_4 = 3$ atunci nu este îndeplinită condiția ca p_4 să aibă două cifre............... **1p**